Applications - Chapitre 8

Loi d'action-réaction, collisions

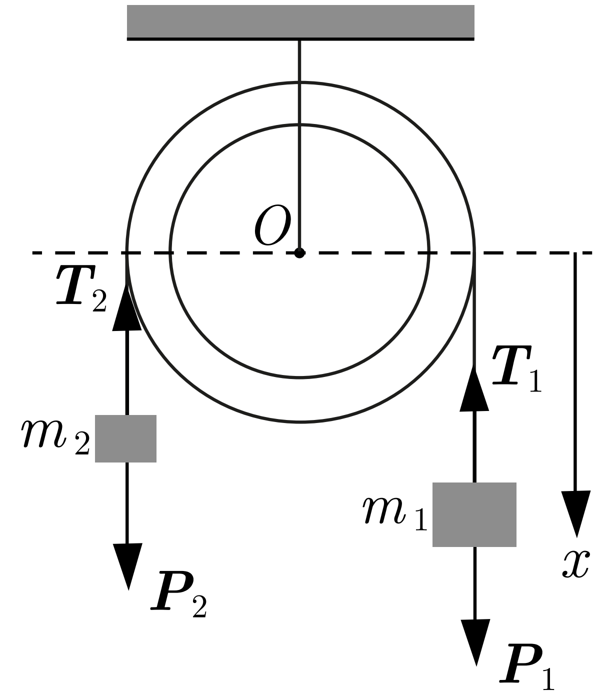
A.8.1 Machine d'Atwood

A.8.2 Oscillateurs harmoniques couplés

A.8.1 Machine d'Atwood

A.8.2 Oscillateurs harmoniques couplés

- Une masse m_1 est reliée par un fil de masse négligeable à une masse m_2. Le fil se déplace avec la rotation de la poulie de masse négligeable sans glissement relatif.



- Equations du mouvement :

1. Sous-système 1 :

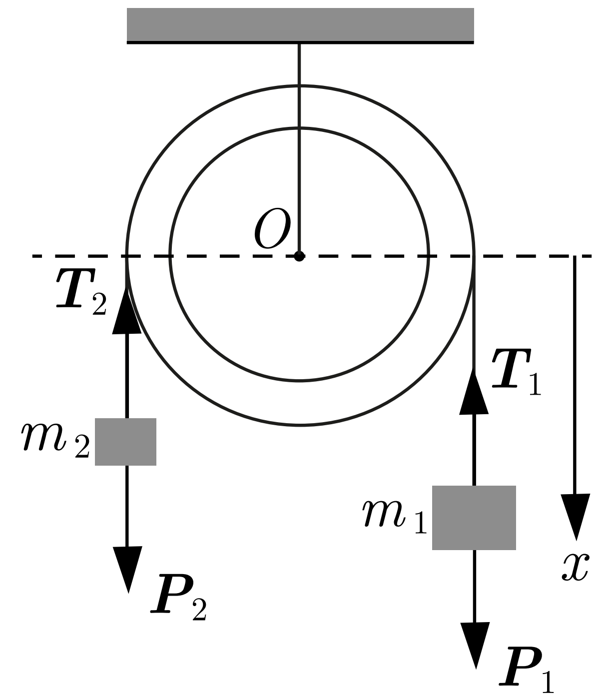
$$\sum \boldsymbol{F}_1^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{T}_1 = m_1\, \boldsymbol{a}_1$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{x}} \ : \ m_1\, g - T_1 = m_1\, \ddot{x}_1 \quad (A.8.1)$$

2. Sous-système 2 :

$$\sum \boldsymbol{F}_2^{\text{ext}} = \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{T}_2 = m_2\, \boldsymbol{a}_2$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{x}} \ : \ m_2\, g - T_2 = m_2\, \ddot{x}_2 \quad (A.8.2)$$



- Conditions de liaison entre (1) et (2) :

  1. Fil (inextensible) :

  $$\boldsymbol{a}_1 = -\,\boldsymbol{a}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -\,\ddot{x}_2 \equiv \ddot{x}$$

  2. Poulie (masse négligeable) :

  $$T_1 = T_2 \equiv T$$

- Equations du mouvement couplées :

$$(A.8.1) \quad \Rightarrow \quad m_1\, g - T = m_1\, \ddot{x} \qquad (A.8.3)$$

$$(A.8.2) \quad \Rightarrow \quad m_2\, g - T = -\,m_2\, \ddot{x} \qquad (A.8.4)$$

- $(A.8.3) - (A.8.4)$:

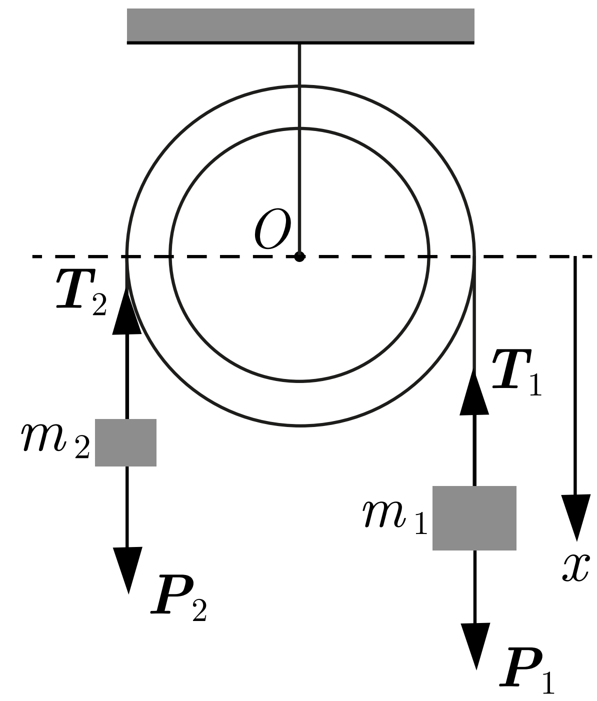
$$(m_1 - m_2)\, g = (m_1 + m_2)\, \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \qquad (A.8.5)$$

- Equation du mouvement :

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \qquad (A.8.5)$$

- Tension : $(A.8.3) \quad \Rightarrow$

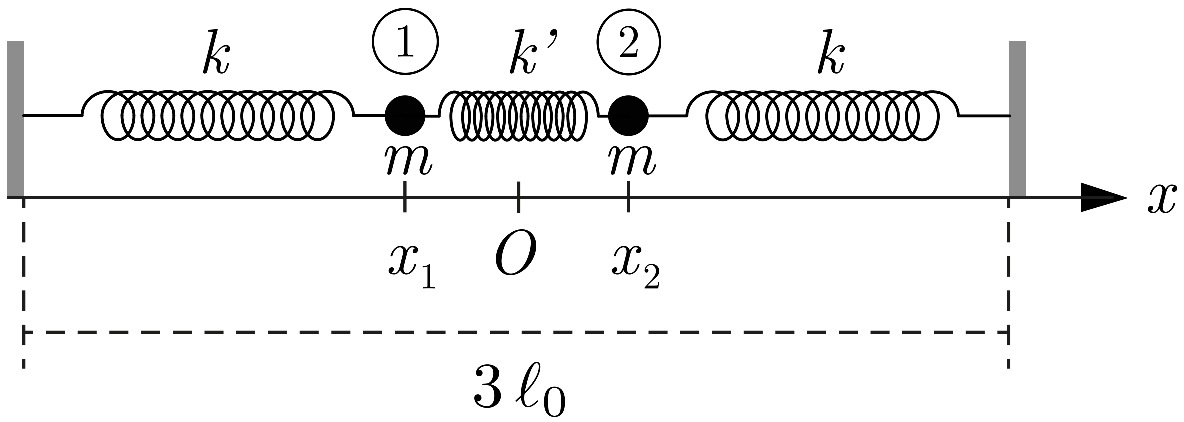
$$T = m_1\,(g - \ddot{x}) = 2\,\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\, g \qquad (A.8.6)$$



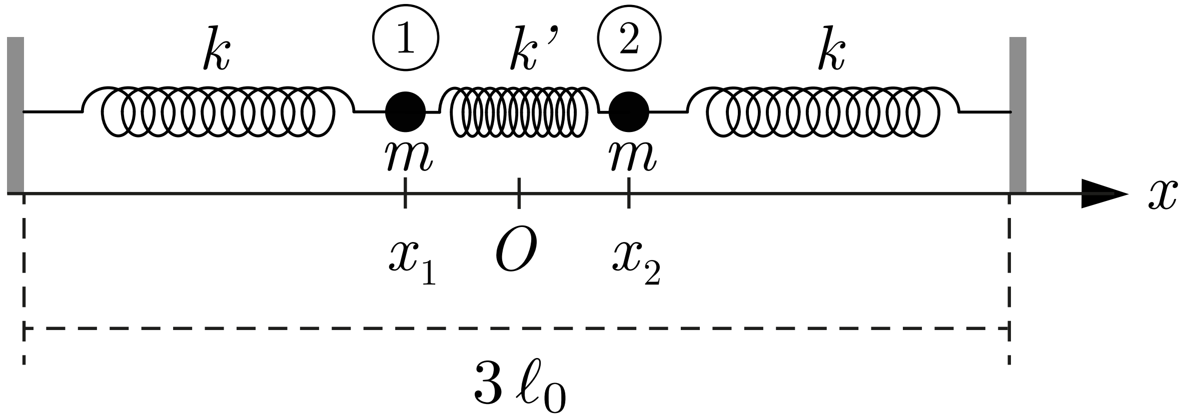
1. Si $m_1 > m_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad m_1$ descend et m_2 monte
2. Si $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow$ équilibre
3. Si $m_1 < m_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} < 0 \quad \Rightarrow \quad m_1$ monte et m_2 descend

A.8.1 Machine d'Atwood

A.8.2 Oscillateurs harmoniques couplés



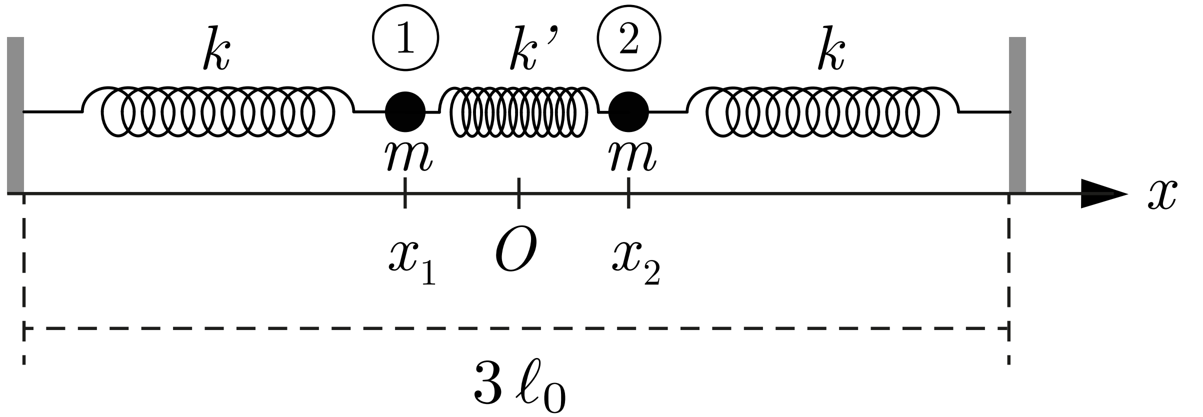
- Deux points matériels de masse m coulissent sans frottement sur un rail horizontal de longueur $3\,\ell_0$. Ils sont attachés à deux ressorts identiques de constantes élastiques k et de longueur à vide ℓ_0 maintenus fixes aux deux extrémités du rail. Les deux points matériels sont reliées entre eux par un ressort de constante élastique k' et de longueur à vide ℓ_0.
- A l'équilibre, les distances entre les point matériels 1 ou 2 et l'origine O, située au centre du rail, est $\ell_0/2 = x_2 = -\,x_1$.



1. Sous-système (1) :
   - Force extérieures (axe horizontal) :
     - Force élastique (gauche) : $\boldsymbol{F}_{e,1g} = -\,k\left(x_1 - \left(-\,\dfrac{\ell_0}{2}\right)\right)\hat{\boldsymbol{x}}$
     - Force élastique (centre) : $\boldsymbol{F}_{e,1c} = k'\,\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big)\hat{\boldsymbol{x}}$
   - Equation du mouvement :

$$\sum \boldsymbol{F}_1^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{F}_{e,1g} + \boldsymbol{F}_{e,1c} = m\,\boldsymbol{a}_1 \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{a}_1 = \ddot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{A.8.7}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{x}} \;:\quad -\,k\left(x_1 + \frac{\ell_0}{2}\right) + k'\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big) = m\,\ddot{x}_1 \tag{A.8.8}$$



2. Sous-système 2 :

- Force extérieures (axe horizontal) :

  - Force élastique (droite) : $\boldsymbol{F}_{e,2d} = -\,k\left(x_2 - \left(\dfrac{\ell_0}{2}\right)\right)\hat{\boldsymbol{x}}$

  - Force élastique (centre) : $\boldsymbol{F}_{e,2c} = -\,k'\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big)\hat{\boldsymbol{x}}$

- Equation du mouvement :

$$\sum \boldsymbol{F}_2^{\text{ext}} = \boldsymbol{F}_{e,2d} + \boldsymbol{F}_{e,2c} = m\,\boldsymbol{a}_2 \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \ddot{x}_2\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{A.8.9}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{x}} \ : \quad -\,k\left(x_2 - \frac{\ell_0}{2}\right) - k'\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big) = m\,\ddot{x}_2 \tag{A.8.10}$$

- Loi d'action-réaction :

$$\boldsymbol{F}_{e,2c} = -\,\boldsymbol{F}_{e,1c} \tag{A.8.11}$$

- Equations du mouvement :

$$\ddot{x}_1 = -\,\frac{k}{m}\left(x_1 + \frac{\ell_0}{2}\right) + \frac{k'}{m}\Big(\left(x_2 - x_1\right) - \ell_0\Big) \tag{A.8.12}$$

$$\ddot{x}_2 = -\,\frac{k}{m}\left(x_2 - \frac{\ell_0}{2}\right) - \frac{k'}{m}\Big(\left(x_2 - x_1\right) - \ell_0\Big) \tag{A.8.13}$$

- Centre de masse :

$$X_G = \frac{m\,x_1 + m\,x_2}{m + m} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right) \quad \Rightarrow \quad \ddot{X}_G = \frac{1}{2}\left(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\right) \tag{A.8.14}$$

- $(A.8.14) \quad \Rightarrow \quad (A.8.12)\ +\ (A.8.13)$:

$$\ddot{X}_G + \frac{k}{m}\,X_G = 0 \tag{A.8.15}$$

Le mouvement du centre de masse X_G est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_G \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

- Position relative :

$$x = x_2 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \tag{A.8.16}$$

- $(A.8.16) \quad \Rightarrow \quad (A.8.13) \; - \; (A.8.12)$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k + 2\,k'}{m}\right)(x - \ell_0) = 0 \tag{A.8.17}$$

- Déformation relative :

$$y = x - \ell_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \ddot{x} \tag{A.8.18}$$

- Equation du mouvement relatif :

$$\boxed{\ddot{y} + \left(\frac{k + 2\,k'}{m}\right) y = 0} \tag{A.8.19}$$

Le mouvement de déformation relative y est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_x \equiv \sqrt{\dfrac{k + 2\,k'}{m}}$.

- Equations horaires :

1. Centre de masse :

$$X_G\left(t\right) = C_G\cos\left(\omega_G t + \varphi_G\right) \tag{A.8.20}$$

2. Position relative :

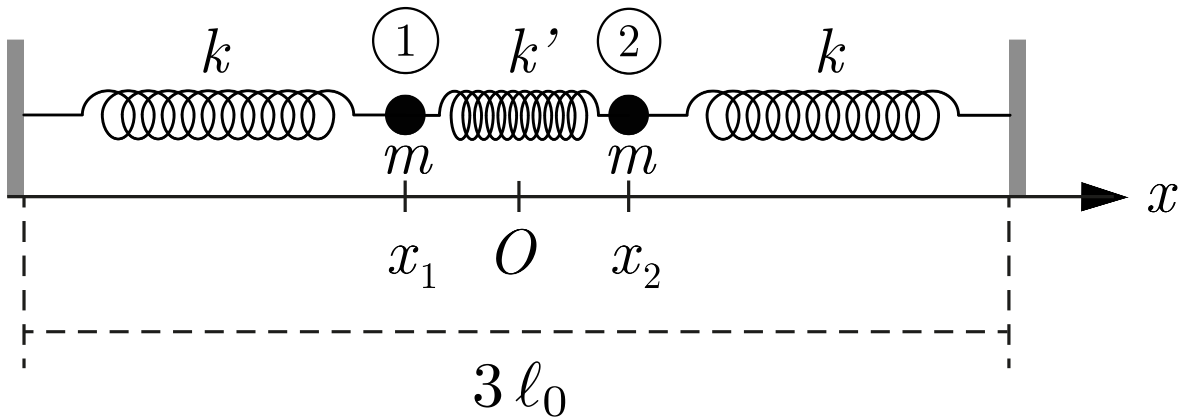
$$x\left(t\right) = C_x\cos\left(\omega_x t + \varphi_x\right) + \ell_0 \tag{A.8.21}$$

3. Position du point matériel 1 :

$$\begin{aligned} x_1\left(t\right) &= X_G\left(t\right) - \frac{1}{2}\,x\left(t\right) \\ &= C_G\cos\left(\omega_G t + \varphi_G\right) - \frac{1}{2}\,C_x\cos\left(\omega_x t + \varphi_x\right) - \frac{\ell_0}{2} \end{aligned} \tag{A.8.22}$$

4. Position du point matériel 2 :

$$\begin{aligned} x_2\left(t\right) &= X_G\left(t\right) + \frac{1}{2}\,x\left(t\right) \\ &= C_G\cos\left(\omega_G t + \varphi_G\right) + \frac{1}{2}\,C_x\cos\left(\omega_x t + \varphi_x\right) + \frac{\ell_0}{2} \end{aligned} \tag{A.8.23}$$



1. Mouvement général

   combinaison linéaire de mouvements oscillatoires de pulsations ω_G et ω_x

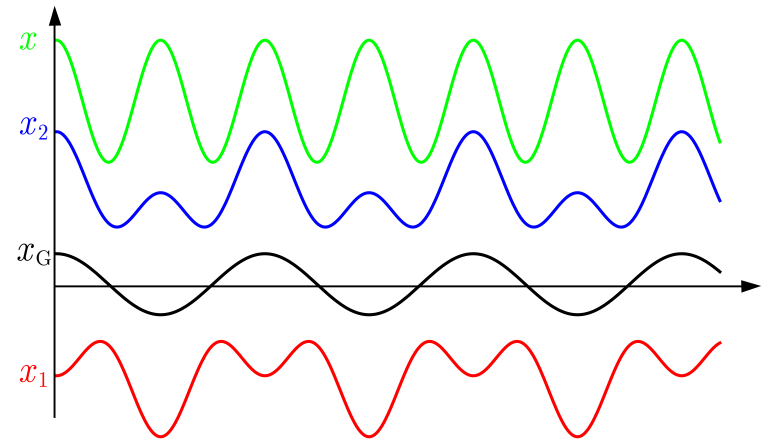
2. Mouvement oscillatoire en phase de pulsation ω_G

   si $\quad C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_2 - x_1 = \ell_0 = \text{cste}$

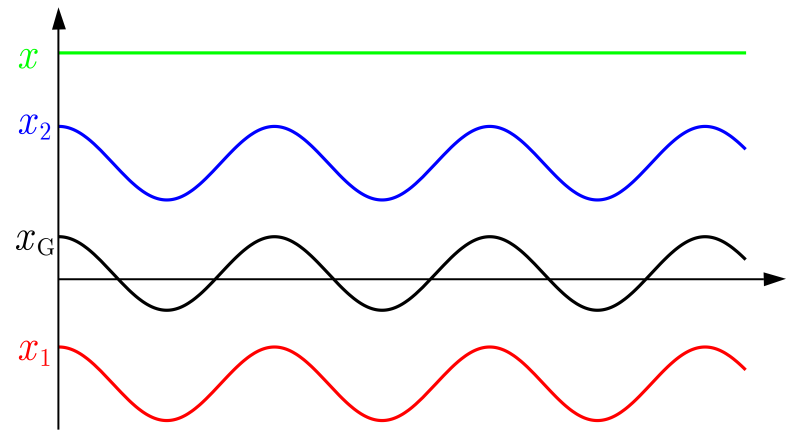
3. Mouvement oscillatoire en opposition de phase de pulsation ω_x

   si $\quad C_G = 0 \quad \Rightarrow \quad X_G = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = -\,x_1$

1. Mouvement général :
   - $x(t)$ périodique (ω_x)
   - $x_2(t)$ ssi $\omega_x/\omega_G \in \mathbb{Q}$
   - $X_G(t)$ périodique (ω_G)
   - $x_1(t)$ ssi $\omega_x/\omega_G \in \mathbb{Q}$



2. Mouvement en phase :
   - $x(t)$ constant (ℓ_0)
   - $x_2(t)$ périodique (ω_G)
   - $X_G(t)$ périodique (ω_G)
   - $x_1(t)$ périodique (ω_G)



3. Mouvement en opposition de phase :
   - $x(t)$ périodique (ω_x)
   - $x_2(t)$ périodique (ω_x)
   - $X_G(t)$ constant (0)
   - $x_1(t)$ périodique (ω_x)